9장. 불완전성

앞 장에서 우리는 여러 양상 논리 체계의 완전성을 증명했지만, 그 증명은 항상 프레임들의 어떤 집합 f에 상대해서 이루졌다. 이번 장에서 우리는 어떤 체계의 모든 정리가 정확히 f-타당하게 되는 프레임들의 집합 f가 존재하지 않는다는 의미에서 불완전한 어떤 체계가 있다는 것을 보일 것이다. 그러나, 이에 앞서 우리는 프레임과 모형의 차이에 관한 몇가지 언급을 할 필요가 있다.

프레임과 모형

만일 우리가 모형을 통해서 완전성의 질문을 제기했다면, 다시 말해, 만일 우리가 체계 S에 대해 어떤 식 α가 f-타당할 때 그리고 오직 그 때만 $\vdash_S \alpha$가 성립하는 모형들의 집합 f가 존재하는지 여부를 물었다면, 그에 대한 답변은 (당연하게) 그렇다고 제시할 수 있는 것이다. 왜냐하면, 표준적 모형을 유일한 원소로 갖는 집합 자체가 바로 그러한 모형의 집합일 것이기 때문이다. 그러나, p.112에서 언급했듯이, 모형 하에서 타당성은 썩 적절한 개념이 아닌 듯하다. 실제로 모형 하에서 타당성이라는 개념은 중요한 속성을 결여하고 있다: 그 타당성은 모든 변환규칙을 통해 보존되지 않는다. 달리 말해, 양상 논리의 바른식들로 이루어진 집합 Λ에 속한 모든 원소들이 어떤 모형 <W,R,V> 하에서 타당하다는 것이 K + Λ의 모든 정리들이 그렇게 타당하다는 것을 의미하지는 않는다는 것이다. 물론 MP와 N이 단일한 모형 하에서 타당성을 보존한다는 것을 보이기는 쉽다. 왜냐하면, 만약 α와 α⊃β 둘 모두가 W의 모든 세계에서 참이라면, [V⊃]에 의하여 β도 참이다. 또한, 만약 α가 W의 모든 세계 하에서 참이라면, 그것은 W에 속한 어떤 세계가 볼 수 있는 모든 세계에서도 당연히 참일 것이다. 따라서, $L\alpha$ 역시 W의 모든 세계에서 참이 될 것이다. 그러나, 이와 같은 것이 US에 대해서는 성립하지 않는다. 어떤 단일 모형에서 US가 타당성을 보존한다고 말하는 것은 만일 α가 그 모형의 모든 세계에서 참이라면, α의 모든 대입예도 그러하다는 것을 말하는 셈이다; 이것이 일반적으로 성립하지 않는다는 것은 쉽게 확인할 수 있다. 가장 단순한 경우를 고려하면, 모형에 포함되는 모든 세계에서 p가 참이지만 q는 그렇지 않는 방식으로 모형을 정의할 수 있다. 그런데, q는 확실히 p의 한 대입예이다. 물론 p는 어떤 정상 양상 체계의 공리(최소한 어떤 일관된 양상 체계의 공리)도 아니다. 그러나, 동일한 상황이 그러한 공리가 되는 바른식에 대해서도 발생한다. 예컨대, 모형에 포함되는 모든 세계에서 $Lp \supset p$는 참이지만 $Lq \supset q$는 그렇지 않는 방식으로 모형을 정의하기란 어렵지 않다. 다음고 같이 두 세계 w_1과 w_2만으로 구성된 모형이 그 예가 될 것이다. $w_1 R w_2$는 성립하지만, 두 세계 모두 자기 자신을 보지 못하고, p는 두 세계 모두에서 참이며, q는 w_1에서 거짓이고 w_2에서 참이다.

따라서 우리는 바른식들의 어떤 집합에 속한 원소들이 모두 어떤 모형 하에서 타당하다고 해서, US, MP, N에 의해 그들로부터 도출되는 모든 바른식들이 그 모형 하에서 타당하다고 확신할 수 없다. 우리느 단지 그 바른식들 자신뿐만 아니라 그들의 모든 대입예들이 그 모형 하에서 타당하다면, 위와 같이 도출된 바른식들이 타당할 것이라는 것만을 확신할 수 있다. 이러한 결과를 다음과 같이 서술할 수 있다.

정리 9.1 만일 바른식들의 집합 Λ에 속한 모든 원소들의 모든 대입예가 어떤 모형 <W,R,V> 하에서 타당하다면, K + Λ의 모든 정리들 역시 <W,R,V> 하에서 타당하다.

우리는 이 정리를 어떻게 증명할 수 있는지에 대해서 대략적인 윤곽만 그려주고, 자세한 사항은 독자에게 맡기고자 한다. 모형 <W,R,V>가 있다고 하자. 어떤 바른식의 모든 대입예가 <W,R,V> 하에서 타당할 때 오직 그 때만 그 바른식은 일반화 가능하다(generalizable)고 부르자. 이 때, 위의 정리 9.1의 가정은 S의 모든 공리, 즉

Λ의 모든 바른식이 일반화 가능하다는 것이다. 이러한 가정에서 정리 9.1의 증명은 어떤 변화규칙에 의해 일반화 가능한 바른식들로부터 도출되는 모든 바른식은 그 자체가 다시 일반화 가능하다는 것을 보여주는 형식으로 진행한다.

불완전한 모형 체계

KH는 다음의 바른식을 K에 덧붙인 체계이다.

H $L(Lp \equiv p) \supset Lp$

우리는 KH가 불완전하다는 것, 즉 프레임들의 어떤 집합도 그것을 특성화하지 못한다는 것을 보이고자 한다.[1] KH의 불완전성을 보이기 위해, 다음의 두 가지를 보이는 것으로 충분하다.

A 만일 H가 F 하에서 타당하다면, $Lp \supset LLp$도 역시 그렇다.
B $Lp \supset LLp$는 KH의 정리가 아니다.

먼저 우리가 왜 이 두가지가 KH의 불완전성을 확립하는지를 알아야 한다. KH가 완전하다고 말하는 것은 다음과 같은 프레임들의 집합 f가 존재한다는 말과 같다.

C (i) 만약 $\vdash_{KH}\alpha$라면, α는 모든 $F \in f$에서 타당하다.
(ii) 만약 α가 모든 $F \in f$에서 타당하다면, $\vdash_{KH}\alpha$이다.

우리는 C가 A, B와 함께 모순을 낳는다는 것을 보이고자 한다. 어떤 $F \in f$를 고려하자. $\vdash_{KH}$H이기 때문에, C(i)에 의해 H는 F에서 타당하다. 그런데, A에 의해 $Lp \supset LLp$는 F에서 타당하다. 따라서, C(ii)에 의해 $\vdash_{KH} Lp \supset LLp$이고, 이는 B와 모순된다.

A의 증명 : 우리는 A의 대우를 증명한다. 즉 우리는 $Lp \supset LLp$이 F에서 타당하지 않으면 H도 타당하지 않다는 것을 보일 것이다. $Lp \supset LLp$는 모든 이행적 프레임에서 타당하므로, 만약 $Lp \supset LLp$가 F에서 타당하지 않다면, 어떤 세 세계 w_1, w_2, w_3가 존재하여 $w_1 R w_2$, $w_2 R w_3$은 성립하지만 $w_1 R w_3$은 성립하지 않을 것이다.
다음과 같이 세계를 두 개의 집합으로 나누자. 만약 w로부터 w_3으로 향하는 R-연쇄(p.136을 보라)가 존재한다면, $V(p, w) = 0$이라 하자. (p.136에서 제시한 R-연쇄의 정의에 따라, w_3에서 자기 자신으로 향하는 0-단계 R-연쇄가 존재하고, 따라서 $R(p, w_3) = 0$이라고 가정하자.) 만약 그러한 연쇄가 없다면 $V(p, w) = 1$이라 하자. 우선 어떤 w로부터 w_3으로 향하는 R-연쇄가 존재하는 상황을 고려해 보자. w가 w_3 자신이 아니고 w_3으로 향하는 R-연쇄 상에 있다면, 그것은 w_3으로 향하는 R-연쇄 상에 있는 세계 w'을 적어도 하나 볼 수 있다. 따라서, $V(p, w) = 0$이고, $V(p, w') = 0$이다. 결국, $V(Lp \equiv p, w) = 1$이다. 이제 w로부터 w_3로 향하는 R-연쇄가 존재하지 않는 상황을 고려해 보자. 만약 w로부터 그러한 연쇄가 존재하지 않는다면, w가 볼 수 있는 세계 w'으로부터도 그러한 연쇄는 존재하지 않는다. 따라서, $V(p, w) = 1$이고, $V(p, w') = 1$이고, 이로부터 $V(Lp, w) = 1$이다. 결국, $V(Lp \equiv p, w) = 1$이다.
이러한 결과는 아마도 w_3를 제외한 모든 w에 대하여 $V(Lp \equiv p, w) = 1$이라는 것을 의미한다. 그런데, w_1은 w_3을 볼 수 없으므로, $w_1 R w$인 모든 세계 w에 대하여 $V(Lp \equiv p, w) = 1$이다. 따라서,

$V(L(Lp\equiv p), w_1)=1$이다. 한편, w_2는 w_3으로 향하는 연쇄 상에 있으므로 $V(p, w_2)=0$이다. 또한, $w_1 R w_2$이기 때문에 $V(Lp, w_1)=0$이다. 결국 H는 이 체계에 포함된 w_1에서 거짓이 된다. H에 대한 모든 프레임은 이행적이고, 그 결과 $Lp\supset LLp$를 타당하게 해야 한다. 이로부터 A가 확립된다.
정리 9.1은 만약 α가 어떤 바른식(여기서는 H)이라면, α의 모든 대입예를 타당하게 하는 임의의 모형은 언제나 K + α의 모든 정리를 타당하게 한다는 것을 보장한다. 이런 이유에서, B를 확립하기 위해서 우리는 H의 모든 대입예는 타당하지만, $Lp\supset LLp$는 타당하지 않은 모형 <W,R,V>를 고안해야 한다.

B의 증명 : F를 다음과 같은 프레임이라고 하자: W는 두 부분으로 이루어진다. 첫 번째 부분은 '보통의' 자연수 0, 1, 2, … 등으로 이루어진다. 다른 부분은 사실상 지난 장에서 도입한 후퇴 프레임(recession frame)으로서, 자연수들의 모사(copy) 0*, 1*, 2*, … 등으로 이루어진다. '보통의' 부분을 N이라고 하고, '별표가 붙은' 부분을 N*라고 하자. 그 때, $W=N\cup N^*$이다.
R을 다음과 같이 정의한다.
(i) N에 속하는 n, m에 대하여, $n>m$일 때, 오직 그 때에만 nRm이다.
(ii) N*에 속하는 n^*, m^*에 대하여, $n\le m+1$일 때, 오직 그 때에만 n^*Rm^*이다.
(iii) N에 속하는 m과 N*에 속하는 n^*에 대하여, n^*Rm이다.

F (= <W,R>) 를 다음과 같은 것으로 상상하는 것이 제일 쉽다:

0* 1* 2* … n* …… m … 2 1 0
N* N

N의 원소들, 즉 '보통의' 수들은 오직 그 자신보다 작은 수들만을 볼 수 있다. 그리고, N*의 원소들, 즉 별표가 첨부된 수들은 자기 자신, 자신 바로 앞에 오는 수(이것이 (ii)가 말하는 바다), 자신보다 큰 모든 별표 달린 수, 그리고 '보통의' 수를 볼 수 있다.
이제 우리는 F에 기반한 모형 <F,V>를 정의한다. 모든 변항 p에 대하여 $V(p,0^*)=0$이고, 0*가 아닌 모든 모든 세계 w에 대하여 $V(p,w)=1$이라고 하자.

보조정리 9.2 $V(V(Lp\supset LLp,2^*)=0$

증명 : 1^*R0^*이고 $V(p,0^*)=0$이므로, $V(Lp,1^*)=0$이다. 2^*R1^*이므로, $V(LLp,2^*)=0$이다. 그러나, 2^*R0^*는 아니기 때문에, 2^*Rw를 만족하는 모든 w에 대하여 $V(p,w)=1$이다. 따라서, $V(Lp,2^*)=1$이고, 이로부터 $V(Lp\supset LLp,2^*)=0$이다.
이제 어려운 부분은 H의 모든 대입예들이 W에 포함된 모든 세계에서 참이라는 의미에서 <F,V>에서 타당하다는 것을 증명하는 것이다. 이를 위해, 우리는 먼저 모든 바른식이 어떤 속성을 갖는다는 것을 보여야 한다. $|\alpha|$를 α의 '진리집합'이라고 부르자:

$|\alpha|=\{w\in W: V(\alpha,w)=1\}$

바른식 α의 진리집합은 단순히 그 모형에서 α가 참이 되는 세계들의 집합니다. W의 어떤 부분집합 A는 그것의 여집합 W-A (즉, $\{w\in W: w\notin A\}$)이 유한할 때 오직 그 때만 co-유한하다고 하자.

보조정리 9.3 어떤 바른식 α에 대하여, $|\alpha|$는 유한하거나 또는 co-유한하다.

증명 : 증명은 α의 구성에 대한 귀납을 통해 이루어진다. 만약 α가 변항이라면, 정의에 의해 $|\alpha| = W-\{0^*\}$이다. 왜냐하면, 모든 변수는 0^*를 제외한 모든 곳에서 참이기 때문이다. 따라서 $|\alpha|$는 co-유한하다. 명백히 $|\alpha|$가 유한하다면, $|-\alpha|$는 co-유한하고, 그 역도 성립한다. $|\alpha \vee \beta|$는 $|\alpha| \vee |\beta|$ 둘 다 유한하다면, $|\alpha| \cup |\beta|$ 역시 유한하다. 만약 그 둘 중에서 하나가 co-유한하다면, $|\alpha| \cup |\beta|$ 역시 co-유한하다.
$L\alpha$에 대한 증명을 위해, 먼저 N에 속하는 어떤 n에 대하여 $V(\alpha, n) = 0$이라고 하자. N에 속하고 $w > n$을 만족하는 모든 w에 대하여 또는 N^*에 속하는 w에 대하여, $V(L\alpha, w) = 0$이고, 따라서, $|L\alpha|$는 유한하다. 만약 N에 속하는 모든 n에 대하여, $V(\alpha, n) = 1$이라면, $|\alpha|$는 확실히 유한하지 않다. 따라서, 그것은 co-유한해야 한다. 또한 그것은 N의 모든 원소들에서 참이기 때문에, $V(\alpha, n^*) = 0$이 되는 가장 큰 n^*가 있어야 한다. 그렇다면, N에 속하는 모든 w에 대하여, 그리고 $m > n+1$을 만족하는 $w = m^*$에 대하여 $V(L\alpha, w) = 1$이다. 따라서 $|L\alpha|$는 co-유한하다. (명백하게, 만약 $|\alpha| = W$라면, $|L\alpha| = W$이다.)
이는 보조정리 9.3을 증명한다. B를 증명하기 위해서 우리는 이제 다음의 정리를 증명하기만 하면 된다.

정리 9.4 모든 바른식 α에 대하여, $L(L\alpha \equiv \alpha) \supset L\alpha$가 $\langle F, V \rangle$에서 타당하다.

증명 : 먼저 W에 속하는 모든 w에 대하여 만약 $V(\alpha, w) = 1$이라면, W에 속하는 모든 w에 대하여 $V(L\alpha, w) = 1$이고, 따라서 H(H의 모든 대입예)가 이 경우 성립한다는 점을 짚고 넘어가자. W에 속하는 어떤 세계 w에 대하여 $V(\alpha, w) = 0$이라고 가정하자.
우선 N에 속하는 어떤 n이 $V(\alpha, n) = 0$이라고 하자. ($n=0$일 수도 있다) 일반성을 잃지 않으면서 우리는 n이 $V(\alpha, n) = 0$을 만족하는 가장 작은 수라고 가정할 수 있다. 그러면, $m < n$을 만족하는 모든 m에 대하여 $V(\alpha, m) = 1$이고, $m \leq n$을 만족하는 모든 m에 대하여 $V(L\alpha, m) = 1$이 되어서, H는 그러한 모든 세계에서 참이 된다. $V(\alpha, n) = 0$이고 $V(L\alpha, n) = 1$이기 때문에, $V(L\alpha \equiv \alpha, n) = 0$이다. 따라서 $w > n$을 만족하는 N의 원소 w에 대하여, 또는 N^*의 원소 w에 대하여, $V(L(L\alpha \equiv \alpha), w) = 0$이다. 이에 H는 이런 모든 세계에서도 참이 된다. 결국, N에 속한 어떤 n에 대하여 $V(\alpha, n) = 0$이라면, H는 모든 세계에서 참이다.
마지막으로, N에 속한 모든 n에 대하여 $V(\alpha, n) = 1$인 가능성을 고려해 보자. 그 때, $|\alpha|$는 유한하지 않고, 보조정리 9.3에 의해 $|\alpha|$는 co-유한하다. 그런데, α는 N의 모든 원소에서 참이기 때문에, $V(\alpha, n^*) = 0$을 만족하는 것들 중에서 가장 큰 $n^* \in N$이 있어야 한다. 만약 그렇다면, $m > n+1$을 만족하는 모든 m에 대하여 $V(L\alpha, m^*) = 1$이고, N에 속하는 모든 m에 대하여 $V(L\alpha, m) = 1$이다. 이에 H는 그러한 모든 세계에서 참이다. 그런데, $V(\alpha, (n+1)^*) = 1$이면서, $V(L\alpha, (n+1)^*) = 0$이다. 따라서, $V(L\alpha \equiv \alpha), n+1^*) = 0$이고, $m \leq n+1$을 만족하는 모든 m에 대하여 $V(L(L\alpha \equiv \alpha), m^*) = 0$이기 때문에, H는 모든 그러한 세계에서 참이다. 이로써 정리를 증명하였고, KH의 불완전성을 확립하였다.
N*에 속하는 n^*에서 α가 거짓일 때 거짓이 되는 것이 $L(\alpha \supset L\alpha)$인 반면, N에 속하는 n에서 α가 거짓일 때 거짓이 되는 것은 $L(L\alpha \supset \alpha)$라는 점에 유념하자. 동치관계를 포함하는 전건이 그렇게 중요하다.
F에서 A의 결과가 어떻게 되는지를 알아보는 것은 시사적이다. F에서 $Lp \supset LLp$가 타당하지 않다는 것을 증명하고자 한다면, A의 w_1, w_2, w_3은 각각 1*, 2*, 그리고 0*가 된다. 0*로 향하는 R-연쇄에 있는 세계들은 정확히 N*에 속한 세계들이다. 한편, 그러한 연쇄에 있지 않은 세계들은 N에 속한 세계들이다. 그러나, H가 실패하기 위해서 p는 N의 모든 원소에서 참이어야 하고 N*에 속한 모든 세계에서 거짓이어야 한다. 이는 $|p|$가 유한하지도 co-유한하지도 않고, 따라서 우리가 F에 기반해 구축한 특정한 모형에 속하는 어떤 바른식의 진리집합도 되지 못한다는 것을 의미한다. 그리고, 당연히 우리는 H가 이 특정한 모형에서 타당하다는 것을 보였다.

KH와 KW

KH와 KW 사이에는 재미있는 관계가 있다. 왜냐하면, KH에 대한 모든 프레임들의 집합이 특성화하는 체계가 바로 KW이기 때문이다. 이를 확립하기 위해, KH + **4** = KW 라는 것을 보이자. 먼저 $\vdash_{KH+4}$**W**를 증명해야 한다. (**4**는 바른식 $Lp\supset LLp$이다)

PC	(1) $(q\supset r)\supset((q\supset p)\supset((r\wedge q)\equiv=(q\wedge p)))$
(1) $[Lp/q, LLp/r]$	(2) $(Lp\supset LLp)\supset((Lp\supset p)\supset((LLp\wedge Lp)\equiv(Lp\wedge p)))$
4 (2) MP	(3) $(Lp\supset p)\supset((LLp\wedge Lp)\equiv(Lp\wedge p))$
(3) L-dis, Eq	(4) $(Lp\supset p)\supset(L(Lp\wedge p)\equiv(Lp\wedge p))$
(4) DR1	(5) $L(Lp\supset p)\supset L(L(Lp\wedge p)\equiv(Lp\wedge p))$
H	(6) $L(Lp\equiv p)\supset Lp$
(6) $[Lp\wedge p/p]$	(7) $L(L(Lp\wedge p)\equiv(Lp\wedge p))\supset L(Lp\wedge p)$
(5)(7) Syll	(8) $L(Lp\supset p)\supset L(Lp\wedge p)$
PC	(9) $(q\wedge p)\supset p$
(9) $[Lp/q]$	(10) $(Lp\wedge p)\supset p$
(10) DR1	(11) $L(Lp\wedge p)\supset Lp$
(8)(11) Syll	(12) $L(Lp\supset p)\supset Lp$

KW가 **4**를 포함한다는 증명은 p.150에 있다. 여기서는 $\vdash_{KW}$**H**를 증명하자.

PC	(1) $(q\equiv p)\supset(q\supset p)$
(1) $[Lp/q]$	(2) $(Lp\equiv p)\supset(Lp\supset p)$
(2) DR!	(3) $L(Lp\equiv p)\supset L(Lp\supset p)$
W	(4) $L(Lp\supset p)\supset Lp$
(3)(4) Syll	(5) $L(Lp\equiv p)\supset Lp$

이 두 증명은 f가 KH에 대한 프레임들의 집합이라 할 때, α는 $\vdash_{KW}\alpha$일 때 오직 그 때에만 f-타당하다는 것을 확립한다. 그 이유를 알아보기 위해, $\vdash_{KW}\alpha$라고 가정해보자. 그러면 $\vdash_{KW+4}\alpha$일 것이다. 그리고, f의 모든 프레임들은 또한 KH+**4**에 대한 프레임들일 것이기 때문에, (위의 (B)에 의해) α는 f-타당하다. 만약 $\dashv_{KW}\alpha$라면, 앞장에서 확립한 KW의 환전성으로부터 α는 KW에 대한 어떤 프레임에서 타당하지 않을 것이다. 그러나, KW는 KH를 포함하기 때문에, KW에 대한 프레임은 마찬가지로 KH에 대한 프레임이 되고, 그에 따라 α는 f-타당하지 않게 된다.

H는 양상도(modal degree) 2의 식이다(p.97을 보라). 양상도 1의 공리들로 이루어진 어떠한 체계도 완전하다는 것이 알려져 있다[2]는 점에서 볼 때, 어떤 의미에서 전술한 결과는 가능한 불완전성 중 최선이라 할 수 있다.

완전성 그리고 유한 모형 속성

유한 모형 속성을 지닌 체계에 대해서는 완전성이 자동적으로 따라 나온다. 우리가 p.145에서 유한 모형 속성을 정의한 바에 따르면 이는 당연하다. 왜냐하면, 우리는 체계 S가 유한 모형 속성을 지니는 것은 그것의 정리가 아닌 바른식 α에 대해서는 항상 그 α가 타당하지 않은 S에 대한 어떤 유한 프레임이 있을 때 오직 그 때

뿐이라고 정의하였고, 이는 f가 S에 대한 모든 유한 프레임들의 집합이라고 하면, 그 f가 S를 특성화하다는 귀결을 갖기 때문이다.

그러나, 그렇게 당연하지 않은 결과도 볼 수 있다. 완전성 문제와 관련하여 프레임과 모형 사이의 차이에 주목하게 된 이유를 생각해보자. 모든 체계 S는 표준적 모형을 갖고, 그 모형에서는 모든 그리고 오직 S의 정리들만이 타당하다. 이와 같다면, 바로 그 표준적 모형으로 이루어진 집합이 S를 특성화할 수 있다. 혹은 S에 대한 모형들, 즉 모든 S의 정리가 타당한 모형들의 어떤 집합이 표준적 모형을 포함한다면, 그 집합은 S를 특성화할 수 있다. 이는 S가 완전하지 않다고 하더라도 — 비록 프레임들의 어떤 집합도 S를 특성화할 수 없다고 하더라도 — 성립한다. 이때, 혹시 누군가가 어떤 유한한 프레임들의 집합이나 나아가 어떠한 프레임들의 집합조차도 체계 S를 특성화할 수 없음에도 유한 모형들의 집합이 S를 특성화할 수 있다고 추측할지도 모를 일이다.

그러나, 이는 옳지 않다. 유한 모형의 어떤 집합에 의해 특성화되는 어떤 체계도 유한 프레임들의 집합에 의해 역시 특성화된다. 크리스터 제거베르크(Krister Segerberg)[3]가 수행한 그 증명은 만일 S에 대한 어떤 유한 모형에서 α가 타당하지 않으면, 그 모형을 쉽게 S에 대한 유한 프레임에 기반한 어떤 모형으로 변환할 수 있다는 것을 보임으로써 진행한다.

이제 S의 모든 정리가 타당한 어떤 모형 <W,R,V>에서 $w \in W$에 대해 $V(\alpha, w)=0$이라고 가정하자. 첫 번째 단계는 모든 바른식 α에 대하여, $V(\alpha, w)= V(\alpha, w')$이 성립한다는 의미에서 서로 '동등한(duplicate)'한 어떤 두 세계 w, w'도 W가 포함하지 않는다는 것을 보이는 것이다.[4] 만약 w와 w'이 동등하다면 우리는 그 둘 중의 하나를 누락시키기만 하면 되고, 만약 w와 동등한 세계가 여럿 있다면, 하나를 제외한 모두를 누락시키면 된다. <W,R,V>로부터 <W*,R*,V*>를 다음과 같은 방식으로 얻을 수 있다고 하자. W*는 동등한 세계들의 집합 중에서 오직 하나만을 제외한 나머지를 누락시킴으로써 W로부터 얻는다. W*에 속하는 w와 w'에 대하여, w'와 동등한 w''이 있어 wRw''이 성립할 때 오직 그 때에만 wR^*w'이다. W*에 속하는 모든 w에 대하여 $V^*(p, w)= V(p, w)$이다. α의 구성에 대한 귀납을 통해 $V^*(\alpha, w)= V(\alpha, w)$를 확립할 수 있다. 이는 만약 <W,R,V>가 S에 대한 모형이라면 <W*,R*,V*>도 S에 대한 모형이고, α가 <W,R,V>에서 타당하지 않으면 그것은 <W*,R*,V*>에서도 타당하지 않으며, 따라서 만약 α가 S의 유한 모형에서 타당하지 않으면 그것은 동등한 세계를 포함하지 않는 (유한) 모형에서도 타당하지 않다는 것을 의미한다.[5]

동등한 세계를 포함하지 않는 S에 대한 어떤 유한모형을 고려해보자. 이 모형에서 모든 세계 w에 대해 어떤 바른식 β_w가 있어서 $w=w'$일 때 오직 그 때에만 $V^*(\beta_w, w')=1$ — 즉, β_w는 w에서 그리고 오직 w에서만 참이다 — 이라는 것을 보이기란 어렵지 않다. 그 이유는 다음과 같다. 만약 W*가 어떤 동등한 세계도 포함하지 않는다면, 각 w와 w'에 대하여 어떤 바른식 $\gamma_{w'}$가 있어서 $V^*(\gamma_{w'}, w)=1$이고 $V^*(\gamma_{w'}, w)=0$이 성립한다. 그래서, 만약 β_w가 이 모든 γ들의 연언이라면, β_w는 w에서 그리고 오직 w에서만 참이다. 이는 물론 W*가 유한하다는 사실에 의존한다. 왜냐하면, 만일 W*가 유한하지 않다면, 무한히 많은 γ들이 있을 수 있고 그 경우 우리는 연언을 형성할 수 없을 것이기 때문이다.

이제 <W*,R*,V*>가 S에 대한 모형이라는 것에 더해 <W*,R*>가 S에 대한 프레임이라는 것을 보이자. <W*,R*>가 그러한 프레임이 아니라고 가정해보자. 그러면, W*에 속한 어떤 세계 w^*와 S의 어떤 정리 α에 대하여 $V'(\alpha, w^*)=0$이 성립하는 <W*,R*>에 기반한 어떤 모형 <W*,R*,V'>이 있다. p가 어떤 변항인 경우, 세계들 w_1, …, w_n의 어떤 모임이 있어서 만일 w가 w_1, …, w_n 중의 하나이면 $V'(p, w)=1$이고, 만일 그렇지 않다면 $V'(p, w)=0$일 것이다. 그리고, β_p가 $\beta_{w_1} \vee \cdots \vee \beta_{w_n}$인 경우, W*에 속하는 모든 세계 w에 대하여 $V'(p, w)= V^*(\beta_p, w)$이다. 이것은 p가 β_p가 원래의 <W*,R*,V*>에서 취하는 것과 동일한 값을 <W*,R*,V'>에서 취한다는 것을 뜻한다. 이제 δ가 α의 어떤 부분식이라 하고, δ'이 δ의 각 변항 p를 β_p로 일률적으로 대치한 결과라고 하자. 바른식의 구성에 관한 귀납에 의해, 우리는 W*에 속하는 모든 w에 대하여 $V'(\delta, w)= V^*(\delta', w)$를 확립할 수 있다. 특히, δ가 α 자신인 경우, $V'(\alpha, w^*)=0$이 주어졌을 때 우리는 $V^*(\alpha', w^*)=0$을 얻을 수 있다. 그런데, α'은 α의 대입예이고 $\vdash_S \alpha$이기 때문에, $\vdash_S \alpha'$이다. 따라서 <W*,R*,V*>는 결국 S에 대한 모형이 아니다.

일반적 프레임(general frame)

$Lp⊃LLp$가 KH의 정리가 아니라는 것을 증명하면서, 우리는 $|\alpha|$가 유한하거나 혹은 co-유한한 모형이라는 개념을 핵심적으로 활용하였다. 그러나, 다른 방식의 관점을 취하는 것도 가능하다. 집합 W와 관계 R로만 이루어진 구조로서 프레임에서 출발하는 것이 아니라, 그 둘과 함께 W의 원소들로 구성된 '허용가능한' 집합들의 집합 P로 이루어진 구조에서 출발할 수도 있다. 그러면, 우리는 모형을 그 구조에 변항에 대한 다음의 값할당을 덧붙임으로써 얻는 것으로 간주할 수 있다. 그 값할당은 모든 변항 p에 대하여 $|p|$가 P에 속한 집합들 중 하나라는 조건을 만족시킨다. 그러한 구조 <W,R<p>는 비록 우리가 앞서 '프레임'이라는 용어를 사용하던 의미에서의 프레임은 아니지만, 모형이라기보다는 프레임이라고 말할 수 있을 것이다. 왜냐하면, 그것은 값할당을 포함하지 않고, 이에 여러 세계에서 바른식의 값을 결정하지 않기 때문이다. 그러나, <S,R,P>를 통해 보조정리 9.3에서 나타난 종류의 증명을 고안하기 위해서는, 일단 모든 변항 p에 대하여 $|p|$가 P에 속한다는 것이 주어지면 우리가 모든 바른식 α에 대하여 $|\alpha|$가 P에 속한다는 것을 확신할 수 있는 방식으로 P를 선택할 필요성이 있다. 이를 위해, 우리는 P가 다음의 조건을 만족시키도록 그것을 선택할 필요가 있다. 세계들의 어떤 집합 A가 P에 속할 때마다, A의 여집합도 그에 속한다($\sim$에 대한 귀납을 위하여). A와 B 둘 모두 P에 속할 때마다, 그들의 합집합도 그에 속한다($\vee$에 대한 귀납을 위하여). A가 P에 속할 때마다, A의 원소들만을 볼 수 있는 모든 세계들의 집합도 그에 속한다(L에 대한 귀납을 위하여). P가 그러한 조건을 만족하는 구조 <W,R,P>를 반 벤덤(nab Benthem)은 일반적 프레임(general frame)이라고 불렀다.[6]
공식적 정의는 다음과 같다: <S,R,P>는 다음의 조건을 만족할 때 오직 그 때만 일반적 프레임이다.
(a) W는 공집합이 아닌 집합니다.
(b) R은 W에서 정의된 이항관계이다.
(c) P는 W의 원소들로 이루어진 집합으로서(즉, $P \in pW$) 다음의 조건을 만족한다.
  (i) 만약 $A \in P$이면, $W-A \in P$이다.
  (ii) 만약 $A \in P$이면, $B \in P$이면, $A \cup B \in P$이다.
  (iii) 만약 $A \in P$이면, $\{w \in W: \forall w' \in W(wRw' \supset w' \in A)\} \in P$이다.

일반적 프레임 <W,R,P>에 기반한 모형은 어떤 구조 <W,R,P,V>가 될 것이다. 여기서 V는 모든 변항 p에 대하여 $|p|$가 P에 속하도록 하는 변항에 대한 값할당이다. 표준적인 규칙들 [V$\sim$], [V$\vee$] 그리고 [VL]은 성립한다고 가정된다. (보조정리 9.3에서, P는 W의 모든 유한한 혹은 co-유한한 부분집합들로 이루어지는 집합일 것이다.) 프레임에서의 타당성에 관한 앞서의 정의를 자연스럽게 확장할 때, 어떤 바른식은 어떤 주어진 일반적 프레임에 기반한 모든 모형에서 타당할(그 모든 모형의 모든 세계에서 참일) 때 오직 그 때에만 그 일반적 프레임에서 타당하다고 말할 수 있다; 어떤 일반적 프레임은 체계 S의 모든 정리들이 그것에서 타당할 때 오직 그 때에만 S에 대한 일반적 프레임이다; 체계 S는 다음의 조건을 만족할 때 오직 그 때에만 일반적 프레임들의 집합 f에 의해서 규정된다. 모든 바른식 α에 대하여, α가 S의 정리일 때 오직 그 때에만 α는 f에 속한 모든 (일반적) 프레임에서 타당하다.
이제 우리가 어떤 정상 양상 체계 S에 대한 표준적 모형이 틀 <W,R>을 고려하면서, 세계들의 허용가능한 집합들의 집합 P를 다음과 같이 정의한다고 하자. 그 표준적 모형 하에서 집합 A에 속한 모든 세계에서 참인 반면에 그 외의 어떤 세계에서도 참이 아닌 어떤 바른식 α가 존재할(즉, $P = \{A \subseteq W: \exists\alpha(A=|\alpha|)\}$) 때 오직 그 때에만 A는 허용가능하다. 위와 같이 정의된 <W,R,P>는 S를 특성화하는 일반적 프레임이라는 것을 보이기란 어렵지 않다. 이는 모든 일반 양상 체계는 그 체계에 대한 모든 일반적 프레임의 집합에 의해 규정된다는 귀결을 갖는다. 어떤 절대적인 의미에서 어떤 체계의 완전성에 관해 가능한 세 번째 설명으로서 어떤 체계는 일반적 프레임들의 어떤 집합에 의해 규정될 때 오직 그 때에만 완전하다고 말한다면, 모든 정상 양상 체계는 완전하게 될 것이다.

일반적 프레임은 각 정상 양상 체계가 그 프레임들의 집합에 의 해 특성화되고, 나아가 단일한 일반적 프레임에 의해 특성화된다는 점에서 모형과 유사하다. 그러나, 일반적 프레임은 어떤 바른식이 어떤 일반적 프레임에서 타당하면, 그것의 모든 대입예도 마찬가지로 타당하다는 점에서 모형과 다르다. 물론 보통의 프레임(일반적 프레임과 구분하는 것이 중요한 맥락에서는 크립키 프레임이라고 때때로 불린다) 역시 이러한 속성을 지닌다; 그러나, p.112에서 보았듯이, 많은 모형은 그렇지 않다. 바로 이런 사실 때문에, 어떤 양상 체계에 대한 타당성은 모형이 아니라 모종의 프레임을 통해서 직관적으로 만족스럽게 제시할 필요가 있다. 우리가 거론한 프레임의 두 종류 중에서, 크립키 프레임에 따른 완전성의 해명을 일반적 프레임과는 달리 완전한 체계와 그렇지 않는 체계를 실질적으로 구분한다; 그러나, 우리는 일반적 프레임을 통하여 때때로 크립키 프레임이나 모형을 통해서는 할 수 없는 독립성 증명(independence proof)을 구성할 수 있다.

우리는 불완전성을 통해 무엇을 이해할 것인가?

이번 장에서 우리가 다룬 불완전한 체계 KH는 확실히 매우 단순한 공리적 기초를 갖지만, 그럼에도 그것이 불완전한 방식에 관해 직관적인 이해를 얻기는 쉽지 않다. — 즉, 그 체계가 프레임들에 부가되는 어떠한 조건에도 정확히 상응할 수 없지만, 허용되는 값할당에 관한 제약이 그에 덧붙여지면 그 조건에 상응할 수 잇는 것이 어떻게 가능한가에 대하여 직관적 이해를 얻기란 쉽지 않다. (사실 이는 여러 문헌들에서 소개된 다른 불완전한 체계들에 대해서도 마찬가지이다) 이와 관련하여, KH와 토마슨(S. K. Thomason)[7]이 소개한 시제 논리의 불완전한 체계를 비교하는 것은 유용하다. 시제 논리는 두 가지 '필연성' 연산자, 즉 과거에 대한 연산자와 미래에 대한 연산잘ㄹ 포함하기 때문에 이 책이 범위를 넘어서기는 하지만, 우리는 그것을 p.218에서 간단히 다룰 것이다. 그럼에도 지금 토마슨의 체계를 간단히 언급하는 것을 유용할 터인데, 그것은 그 체계의 불완전성을 낳는 원천에 대하여 직관적인 '느낌'을 가질 수 있기 때문이다. 의도된 해석이 주어졌을 때, 토마슨의 공리들이 갖는 귀결은 시간의 끝은 결코 없다는 것이다. 그리고, 다른 한 귀결은 모든 명제는 결국에는 변하지 않는 진리값을 취한다는 것이다.(시간은 끝이 없기 때문에 다음과 같은 어떤 특정한 시점이 반드시 있을 필요는 없지만 말이다. 그 시점 이후에는 모든 명제가 불변의 진리치를 갖는다.)
토마슨은 그의 체계에 대한 어떤 크립키 프레임도 없다는 것을, 따라서 그의 체계가 프레임들의 어떠한 집합에 의해서도 규정될 수 없다는 것을 증명하였다; 다음과 같은 이유에서 이는 직관적으로 놀라운 결과는 아니다. 만일 우리가 체계의 원소에 시간적 해석을 가한다면(가령, '세계들'을 시간의 각 순간으로 그리고 R을 '더 이른'으로), 프레임 혹은 프레임들의 집합은 시간에 대한 가능한 구조를 표현하는 것으로 간주할 수 있다; 그러나, 단순히 (끝없는) 시간의 구조 자체가 모든 명제들이 결국에 변하지 않는 진리값을 갖게 해준다는 것을 보장하기에 충분한지를 납득하기란 매우 어렵다. 그러나, 허용가능한 값할당에 대한 제약이 부가된 시간의 구조가 그러한 보장을 하기에 충분하다는 것을 납득하기란 원리적으로 어려운 것은 아니다. KH에 대한 의미론과 유비는 다음과 같다; 세계를 원소로 갖는 허용가능한 집합들의 집합에 대한 우리의 정이는, 모든 바른식 α에 대하여 α 자체나 혹은 $\sim\alpha$가 유한한 수의 세계에서 참이라는 것을 보장해준다; 그리고 이는 프레임의 각 끝 지점의 유한한 부분을 제외하고는(이런 부분이 없을 수도 있다), 모든 바른식 α가 변하지 않는 진리값을 갖는다는 것을 의미한다. 이처럼 단지 크립키 모형에 부가된 조건이 아니라, 그에 덧붙여 값할당에 대한 제약을 고려해야만, 그러한 모형들의 집합에 의해 특성화되는 체계를 결정할 수 있다고 기대하는 것이 (토마슨의 체계에서 그랬던 것처럼) 직관적으로 합당해 보인다.

연습문제 — 9

9.1 정리 9.1을 증명하라.

9.2 VB를 K + **VB**라 하고, **VB**는 $MLp \vee L(L(Lq \supset q) \supset q)$라고 하자. (A) VB에 대한 모든 프레임은 **MV**, $MLp \vee Lp$에 대한 프레임이지만, (B) **MV**는 VB의 정리가 아니라는 것을 보여라. 이 사실이 VB의 불완전성을 보여준다는 것을 설명하라.

9.3 K에서 다음의 공리를 덧붙여 얻은 체계가 완전하지 않다는 것을 증명하라.
(i) $LMq \supset L(Lp \supset p)$
(ii) $L(L(Lp \supset p) \supset Lp)$

9.4 MV를 K+**MV**라 하자.
(a) VB는 체계 MV의 정리라는 것을 증명하라.
(b) MV는 바로 VB에 대한 모든 프레임들의 집합에 의해 특성화되는 체계라는 것을 증명하라.

9.5 <W,R>에서 <W*,R*>로 가는 p-morphism이 있는 경우, 만약 α가 <W,R>에서 타당하다면, α는 <W*,R*>에서 타당하다는 것을 증명하라.

9.6 모든 정상 양상 체계는 일반적 프레임들의 집합에 의해 특성화된다는 증명을 빈틈없이 제시하라.

Notes

1 이 체계의 불완전성은 Boolos and Sambin 1985에서 증명되었다. 본문에서 제시된 증명은 근본적으로 그들이 고안한 증명을 단순화시킨 것이다. 전체 증명은 Cresswell 1987에 나온다. 가장 초기의 불완전한 논리들은 Fine 1947b와 S.K. Thomason 1947a에 나온다. 다른 사례는 van Benthem 1978, 1979b 그리고 Boolos 1980에 나온다. Ming Xu 1991은 체계 KH_n, 즉 K + $L^n(L(Lp \equiv p) \supset Lp)$은 $n>m$일 때 KH_m이 KH_n을 포함하는 관계를 가지면서 n의 값에 따라 다른 체계가 된다는 것을 보여준다. 아울러 그것은 그 체계들 각각에 대하여 프레임들의 집합은 바로 KW에 대한 프레임들의 집합이라는 것을 보여준다. 유사한 결과가 다른 체계들에 대해서도 얻어진다. Blok 1980은 대수적인 방법을 통하여 어떤 주어진 완전한 체계의 프레임과 동일한 프레임을 지니는 불완전한 체계는 없거나 혹은 셀 수 없을 만큼 많다는 것을 보여준다. Fine (op. cit., p.28)은 Fine 1947c에서 그가 사용한 방법이 S4의 셀 수 없이 많은 불완전한 확장들을 산출한다는 점을 지적한다. van Benthem 1979b에서 논의된 체계들 중 하나의 불완전성은 Hughes and Cresswell 1984의 4장에서 증명되었다.
2 Lewis 1974
3 Segerberg 1971, p.33
4 Segerberg 1971, p.29는 동등한 세계가 없는 모형을 '구분가능한' 모형이라고 부른다.
5 이런 식으로 정확히 동일한 식을 만족하도록 보장하면서 기존의 모형에서 새로운 모형을 만드는 것은 Segerberg 1968a, p13f.가 pseudo-epimorphism 혹은 간단히 p-morphism이라고 부른 것의 한 예이다. 간단히 프레임 <W,R>에서 프레임 <W*,R*>로 가는 p-morphism은 W에서 W*로 가는 다음과 같은 함수이다. W에 속하는 w, w'에 대하여 만약 wRw'이라면 $f(w)R{*}f(w')$이다. 그리고, W*에 속하는 u, v에 대하여, 만약 $uR{*}v$라면 $f(w)=u$를 만족하는 W의 원소 w에 대하여 wRw'과 $f(w')=v$를 만족하는 어떤 $w' \in W$가 존재한다. 모든 변항 p와 모든 $w \in W$에 대하여 $V(p,w)=V^*(p,f(w))$라면, 모든 α에 대하여 $V(\alpha,w)=V^*(\alpha,f(w))$이다. 지금의 예에서 $f(w)$는 당연히 w와 동등한 세계들의 대표이다.
6 van Benthem 1978. (여기서 사용된 '일반적'이라는 용어는 고차 술어 논리에서 전개된 유사한 상황과 관련하여 발표된 Henkin 1950에서 따왔다.) Makinson 1970은 그러한 구조를 관계적 프레임(relational frame)이라고 부르고 S.K. Thomason 1972a, p.151,은 일차 구조(first-order structure)라고 부른다. 토마슨(op. cit., p.154)은 그 구조에 두가지 별도의 조건을 부가하여, 그가 정화된 구조(refined structure)라고 부른 것을 얻는다. 이 조건은 (a) 만일 $w \neq w'$이라면, 어떤 허용가능한 집합 A가 있어서 $w \in A$이지만 $w' \notin A$라는 것이고; 그리고 (b) 만약 wRw'이 아니라면, 어떤 허용가능한 집합 A가 있어서 $w \in A$이지만 $w' \notin A$라는 것이다. Goldblatt 1976, Part 1, p.64,는 별도의 조건을 부가함으로써 그가 기술적 프레임(descriptive frame)이라고 부른 것을 얻는다.(기술적 프레임은 표준적 모형과 연결된다.)
7 S.K. Thomason 1972a, pp.153f